1. Решите уравнение:

$$\frac{\log_5(5-4x+x^2)}{\log_5 x} = 2$$

$$\log(5-4x+x^2) = \log_5 x^2$$

$$5-4x+x^2 = x^2$$

$$5-4x=0$$

$$4x=5$$

$$x=1,25$$

Ответ: $x=1,25$

2. Решите уравнение:

$$\log_3 x = \frac{1}{2}\log_3 16 + 3\log_3 0,5$$

$$\log_3 x = \log_3 4 + \log_3 \frac{1}{8}$$

$$\log_3 x = \log_3\left(4\cdot\frac{1}{8}\right)$$

$$\log_3 x = \log_3 \frac{1}{2}$$

$$x=\frac{1}{2};\ x=0,5$$

Ответ: 0,5

3. Решите уравнение:

$\log_2(5-x)+\log(4-x)=\log_{0,5}0,05$

$\log_2(5-x)\cdot(4-x)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{20}$

$\log_2(20-4x-5x+x^2)=\log_2 20$

$x^2-9x+20=20$

ОДЗ: $\begin{cases}5-x>0\\4-x>0\end{cases}$

$x^2-9x=0$

$\begin{cases}x<5\\x<4\end{cases}$

$x(x-9)=0$

$x=0$ $\quad x-9=0$

$x=9$ $\varnothing$

Ответ: $x=0$

4. Решите систему уравнений:

$\begin{cases}\log_2 x+\log_2 y=2+\log_2 5\\\log_{0,5}(x-y)=0\end{cases}$

$\begin{cases}\log_2(x\cdot y)=\log_2(4\cdot 5)\\x-y=0,5^0\end{cases}$

$\begin{cases}x\cdot y=20\\x-y=1\end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$

$\begin{cases}\underline{x=1+y}\\(1+y)\cdot y-20=0\end{cases}$

$y^2+y-20=0$

$y_1=-5$ $\quad y_2=4$

$x_1=-4$ $\quad x_2=5$

$\varnothing$

Ответ: $(5;4)$

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y+5=0 \\ \log_3(x+2y+4)=2 \end{cases}$$

Найдите $x+y$ – ?

$$\begin{cases} y=-5 \\ x+2y+4=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ y=-5 \end{cases}$$

$x=5-2\cdot(-5)$

$x=15$

$x+y=15-5=10$

Ответ: 10

6. Решите уравнение:

$$3^{\log_9(x+3)}=\log_2 8$$

$$3^{\log_{3^2}(x+3)^1}=\log_{2^1}2^3$$

$$3^{\frac{1}{2}\log_3(x+3)}=3\log_2 2$$

$$3^{\log_3\sqrt{x+3}}=3$$

ОДЗ: $x+3>0$

$x>-3$

$\sqrt{x+3}=3$

$x+3=9$

$x=6$

Ответ: $x=6$

7. Решите уравнение:

$$16^{\log_4(1-4x)}=8x^2+7$$

$$4^{\log_4(1-4x)^2}=8x^2+7$$

$$(1-4x)^2=8x^2+7$$

$$16x^2-8x+1=8x^2+7$$

$$8x^2-8x-6=0$$

$$4x^2-4x-3=0$$

$$x=-0{,}5 \qquad x=1{,}5$$

$$\varnothing$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

8. Решите уравнение:

$$\log_3 x=\log_3 1{,}5+\log_3 8$$

$$\log_3 x=\log_3(1{,}5\cdot 8)$$

$$x=12 \qquad \text{ОДЗ}: x>0$$

Ответ: $x=12$

9. Решите уравнение:

$$\log_2 \log_3 \frac{x}{x-1} = 1$$

$$\log_3 \frac{x}{x-1} = 2^1$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{9}{1}$$

$$9x - 9 = x$$

$$8x = 9$$

$$x = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$$

Ответ: $1\frac{1}{8}$

10. Решите уравнение:

$$\lg(0,1 \cdot x) \cdot \lg(10x) = 3$$

$$(\lg 0,1 + \lg x) \cdot (\lg 10 + \lg x) = 3$$

$$(-1 + \lg x)(1 + \lg x) = 3$$

$$\lg^2 x - 1 = 3$$

$$\lg^2 x = 4$$

$$\lg x = 2 \qquad \lg x = -2$$

$$x = 10^2 \qquad x = 10^{-2}$$

$$x = 100 \qquad x = 0,01$$

Ответ: 0,01; 100

11. Решите уравнение:

$\log_3(25^x - 2\cdot 5^x) = 2\log_9 15$

$\log_3(25^x - 2\cdot 5^x) = \log_3 15$

$5^{2x} - 2\cdot 5^x - 15 = 0$

$5^x = t,\ t > 0$

$t^2 - 2t - 15 = 0$

$t = 5 \qquad t = -3$

$\varnothing$

$5^x = 5^1$

$x = 1$

Ответ: $x = 1$

12. Решите систему уравнений:

$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 2500 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 25^2 \\ y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y = 2 + x \\ 2^x \cdot 5^{2+x} = 2500 \end{cases}$

ОДЗ:

$y - x > 0$

$2^x \cdot 25 \cdot 5^x = 2500$

$10^x = 100$

$10^x = 10^2$

$x = 2$

$y = 2 + 2 = 4$

Ответ: $(2; 4)$

13. Решите уравнение:

$$\lg\sqrt{1-x^2}-3\lg\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\lg(1+x)+2$$

$$\lg\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1-x})^3}=\lg\sqrt{1+x}+\lg 100$$

$$\lg\frac{\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1-x})^2}=\lg\sqrt{1+x}\cdot 100$$

$$\frac{\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{1+x}\cdot 100$$

$\sqrt{1+x}=0$ $\qquad (\sqrt{1-x})^2=\frac{1}{100}$

$1-x=0,01$

$x=-1$ $\qquad x=0,99$

$\varnothing$

Ответ: $x=0,99$

14. Решите уравнение:

$$\log_2(2x-1)+\log_2(x+5)=\log_{0,5}\frac{1}{13}$$

$$\log_2(2x-1)(x+5)=\log_{2^{-1}}13^{-1}$$

$$\log_2(2x^2-x+10x-5)=\log_2 13$$

$$2x^2+9x-5=13$$

$$2x^2+9x-18\,x=0$$

$$D=81+8\cdot 18=81+144=15^2$$

$$x_1=\frac{-9+15}{4}=1,5$$

$$x_2=\frac{-9-15}{4}=-6 \quad \varnothing$$

Ответ: $x=1,5$

15. Решите уравнение:

$$\lg(100x)\cdot\lg(0{,}01x)=5$$

$$(\lg 100+\lg x)(\lg 0{,}01+\lg x)=5$$

$$(\lg x+2)(\lg x-2)=5$$

$$\lg^2 x-4=5$$

$$\lg^2 x=9$$

$$\lg x=3;\ \lg x=-3$$

$$x=1000;\ x=0{,}001$$

Ответ: 0,001; 1000.

16. Решите уравнение:

$$1-2\log_{15}3=\log_{15}5-\log_{15}(2x+1)$$

$$\log_{15}15-\log_{15}9=\log_{15}\frac{5}{2x+1}$$

$$\log_{15}\frac{15}{9}=\log_{15}\frac{5}{2x+1}$$

$$\frac{5}{3}=\frac{5}{2x+1}$$

$$2x+1=3$$

$$2x=2$$

$$x=1$$

Ответ: $x=1$

17. Решите уравнение:

$$x^{1-\lg x} = 0{,}01$$

Прологарифмируем обе части уравнения

$$\lg x^{1-\lg x} = \lg 0{,}01$$

$$(1-\lg x)\cdot\lg x = \lg 10^{-2}$$

$$-\lg^2 x + \lg x = -2$$

$$\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$$

$\lg x = -1$ $\qquad$ $\lg x = 2$

$x = 0{,}1$ $\qquad$ $x = 100$

Ответ: 0,1; 100.

18. Решите уравнение:

$$\sqrt[4]{x^{\lg x+7}} = 10^{\lg x+1}$$

Прологарифмируем обе части уравнения

$$\lg x^{\frac{1}{4}(\lg x+7)} = \lg 10^{\lg x+1}$$

$$\frac{1}{4}(\lg x+7)\lg x = (\lg x+1)\lg 10$$

$$\lg^2 x + 7\lg x = 4\cdot\lg x + 4$$

$$\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$$

$\lg x = -4$ $\qquad$ $\lg x = 1$

$x = 10^{-4}$ $\qquad$ $x = 10$

Ответ: 10^{-4}; 10.

19. Решите уравнение:

$$\log_x(125\cdot x)\cdot\log_{25}^2 x=1$$

$$\frac{\log_5 125\cdot x}{\log_5 x}\cdot\frac{\log_5 x}{\log_5 25}\cdot\frac{\log_5 x}{\log_5 25}=1$$

$$\frac{\log_5 125+\log_5 x}{\cancel{\log_5 x}}\cdot\frac{\log_5 x\cdot\cancel{\log_5 x}}{2\cdot 2}=1$$

$$(3+\log_5 x)\cdot\log_5 x=4$$

$$\log_5^2 x+3\log_5 x-4=0$$

$\log_5 x=1$ $\qquad$ $\log_5 x=-4$

$x=5$ $\qquad$ $x=5^{-4}=\frac{1}{625}$

Ответ: $x=\frac{1}{625}$; $x=5$

- Решение логарифмических неравенств.

1. Решите неравенство:

$$\frac{x^2+2x}{\log_{0,2}(x+2)} > 0$$

ОДЗ: $x+2>0$

$x>-2$.

$$\frac{x(x+2)}{\log_{5^{-1}}(x+2)} > 0$$

$$-\frac{x(x+2)}{\log_5(x+2)} > 0 \quad \Big| \cdot(-1)$$

$$\frac{x\cdot(x+2)}{\log_5(x+2)} < 0$$

Нули ф-ии

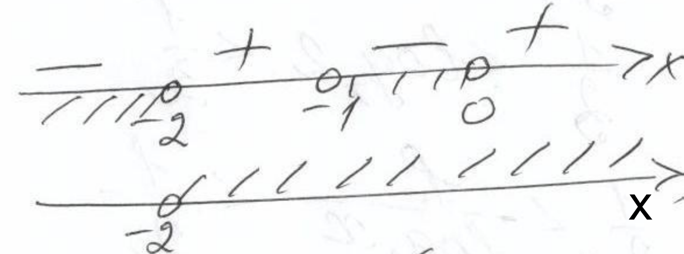
$\log_5(x+2)=0$

$x+2=5^0$

$x+2=1$

$x=-1$

$$\frac{x(x+2)}{x+1} < 0$$



Ответ: $x\in(-1;0)$

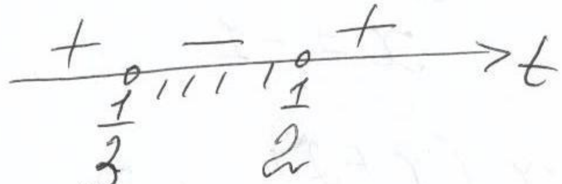
2. Сколько целых решений имеет неравенство:

$$1 - 5\log_x 2 + 6\log_x^2 2 < 0;$$ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\underline{\log_x 2 = t}$

$6t^2 - 5t + 1 < 0$

$t_1 = \frac{1}{2}$ $\quad t_2 = \frac{1}{3}$



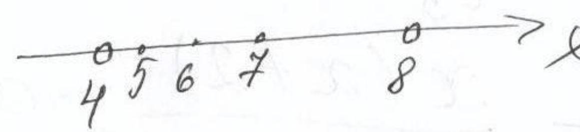
$\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} < \log_x 2 < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{\log_2 x} < \frac{1}{2}$

$2 < \log_2 x < 3$

$4 < x < 8$



три целых решения

Ответ: 3.

- Преобразование логарифмических выражений.

1. Вычислить:

$$\frac{1}{3}\log_4 216 - 2\log_4 3 + \frac{1}{2}\log_4 576 =$$

$$= \log_4 6 - \log_4 9 + \log_4 24 =$$

$$= \log_4 \frac{\cancel{6}^{\,2}\cdot \cancel{24}^{\,8}}{\cancel{9}_{\,3}} = \log_4 16 =$$

$$= \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2$$

Ответ: 2

2. Вычислить:

$$49^{0,5\log_7 9 - \log_7 6} =$$

$$= 7^{2(\log_7 3 - \log_7 6)} =$$

$$= 7^{2\log_7\left(\frac{3}{6}\right)} = 7^{2\log_7 \frac{1}{2}} =$$

$$= 7^{\log_7 \frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$

3. Вычислить:

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}}+49^{\frac{1}{\log_8 7}}}=$$

$$=\sqrt{25^{\log_5 6}+49^{\log_7 8}}=$$

$$=\sqrt{5^{2\log_5 6}+7^{2\log_7 8}}=$$

$$=\sqrt{5^{\log_5 36}+7^{\log_7 64}}=$$

$$=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=$$

$$=10$$

Ответ: 10

4. Вычислить:

$$\frac{27^{-\log_3 \sqrt[3]{5}}}{21^{1+\log_{\frac{1}{12}} 12}}=\frac{3^{-3\log_3 5^{\frac{1}{3}}}}{21\cdot 21^{-\log_{12} 12}}$$

$$=\frac{3^{\log_3 5^{-1}}}{21^1\cdot 21^{-1}}=\frac{5^{-1}}{21^0}=$$

$$=\frac{1}{25}$$

Ответ: $\frac{1}{25}$

5.

Вычислить:

$\log_4 \frac{1}{5} + \log_4 36 + \frac{1}{2}\log_4 \frac{25}{81} =$

$= -\log_4 5 + \log_2 9 + \frac{1}{2}\log_4 5^2 -$

$- \frac{1}{2}\log_4 9^2 =$

$= -\log_4 5 + \log_2 9 + \log_4 5 -$

$- \log_2 9 = 0$

Ответ: 0

6. Вычислить:

$3\log_6 3 + 0{,}5\log_6 81 - 5\log_6 3 =$

$= \log_6 27 + \log_6 9 - \log_6 3^5 =$

$= \log_6 \frac{27 \cdot 9}{3^5} =$

$= \log_6 \frac{3^5}{3^5} = \log_6 1 =$

$= 0$

Ответ: 0

7. Вычислить:

$$25^{\frac{1}{2}\log_5 36+\log_{0,2}4} =$$

$$= 5^{2\left(\frac{1}{2}\log_5 36+\log_{5^{-1}}4\right)} =$$

$$= 5^{2(\log_5 6-\log_5 4)} =$$

$$= 5^{2\log_5 \frac{6}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Ответ: $2\frac{1}{4}$

8. Вычислить:

$$\frac{8^{-\log_2 \sqrt[3]{7}}}{35^{1+\log_{\frac{1}{15}}15}} = \frac{2^{-3\log_2 7^{\frac{1}{3}}}}{35\cdot 35^{-\log_{15}15}} =$$

$$= \frac{2^{-\log_2 7}}{35^1\cdot 35^{-1}} = \frac{2^{\log_2 \frac{1}{7}}}{35^0} =$$

$$= \frac{\frac{1}{7}}{1} = \frac{1}{7}$$

Ответ: $\frac{1}{7}$

9. Вычислить:

$3\log_2(\log_4 16)+\log_{0,5}2=$

$=3\log_2 2+\log_{2^{-1}}2 =$

$=3-1=2$

Ответ: 2

10. Найдите $\frac{x}{x+1}+1$, где x – корень уравнения

$\log_{\frac{1}{16}}x+\log_{\frac{1}{4}}x+\log_{\frac{1}{2}}x=7$

$-\frac{1}{4}\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2 x-\log_2 x=7$

$-\frac{7}{4}\log_2 x=7$

$\log_2 x=-4$

$x=\frac{1}{16}$

$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+1}+1=\frac{1}{16}:\frac{17}{16}+1$

$=\frac{1}{16}\cdot\frac{16}{17}+1=1\frac{1}{17}=\frac{18}{17}$

Ответ: $\frac{18}{17}$

- Решение тригонометрических неравенств.

1. Решите неравенство:

$4\cos^2 x + 3\sin x \cdot \cos x + 5\sin^2 x > 0$

разделим обе части неравенства на $\cos^2 x$

$5tg^2 x + 3tg x + 4 > 0$

$tg x = t$

$5t^2 + 3t + 4 > 0$

$5t^2 + 3t + 4 = 0$

$D = 9 - 4\cdot 4\cdot 5 = -71 < 0$

Графиком функции $y = 5t^2 + 3t + 4$ является парабола, график расположен выше оси Ox. Значит имеет любые решения.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

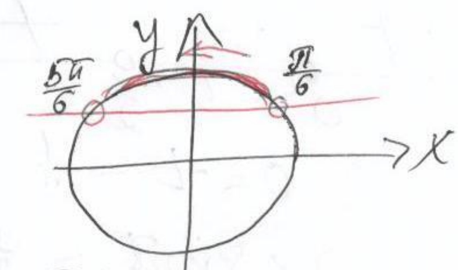
2. Решите неравенство:

$3\sin 2x + 5\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) > 4$

$3\sin 2x + 5\sin 2x > 4$

$8\sin 2x > 4$

$\sin 2x > \frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

$\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right)$, $n \in Z$

3. Решите неравенство:

$\sin x + \cos 2x > 1$

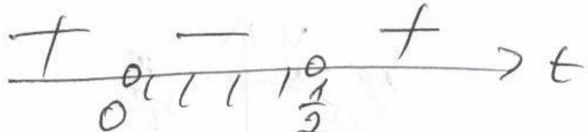
$\sin x + 1 - 2\sin^2 x > 1 \quad |\cdot(-1)$

$2\sin^2 x - \sin x < 0$

$\sin x = t, \quad t \in [-1; 1]$

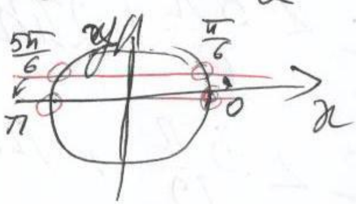
$2t^2 - t < 0$

$2t\left(t - \frac{1}{2}\right) < 0$



$0 < t < \frac{1}{2}$

$0 < \sin x < \frac{1}{2}$



Ответ: $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n \in Z$

4. Решите неравенство:

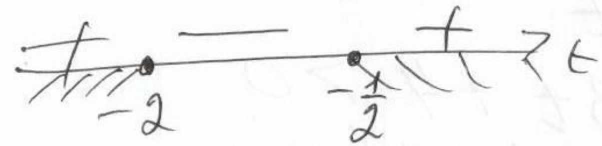
$\cos 2x + 5\cos x + 3 \geq 0$

$2\cos^2 x - 1 + 5\cos x + 3 \geq 0$

$2\cos^2 x + 5\cos x + 2 \geq 0, \quad \cos x = t, \quad t \in [-1; 1]$

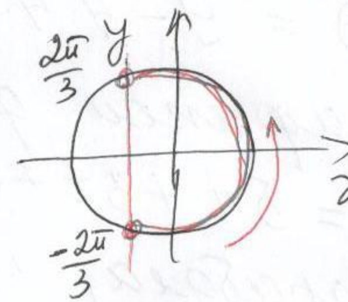
$2t^2 + 5t + 2 \geq 0$

$(t+2)\left(t + \frac{1}{2}\right) \geq 0$



$\cos x \leq -2$ $\quad$ $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

$\varnothing$



Ответ: $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$