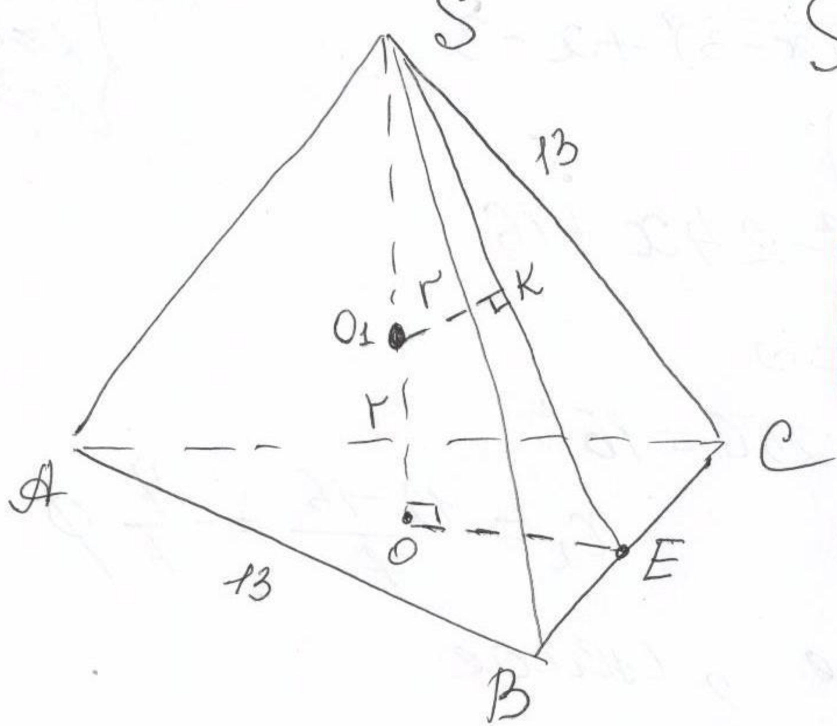
① В правильном тетраэдре с ребром 13, радиус вписанного шара равен:



$$SO = \boxed{H = a\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

стр. 82

$$\boxed{r = \frac{1}{4}H}$$

стр 82

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{13\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{6}}{12}$$

A

$$\frac{13\sqrt{6}}{12} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{13 \cdot 6}{12 \cdot \sqrt{6}} = \frac{13}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{26}{4\sqrt{6}}$$

E

Ответ: A, E.

(2) Найдите множества решений уравнения $5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x = 5$

$5 \cdot \sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + 6\cos^2 x - 5\cos^2 x - 5\sin^2 x = 0$

$\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

$\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$

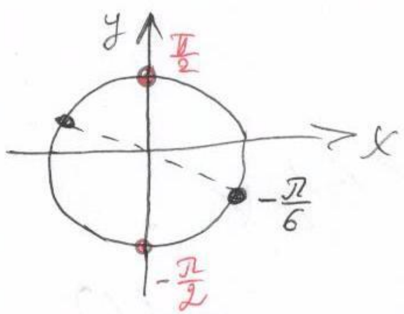
$\cos x = 0$ или $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0$

$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$



(B) (F)

(G) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 3n+1$

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, да

Ответ: (B), (F), (G).

3) Корень уравнения $\sqrt{2x+1}=2\sqrt{x}-\sqrt{x-3}$ является числом:

Возводим обе части уравнения в квадрат

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ x\geq 0 \\ x-3\geq 0 \end{cases}$

$$2x+1=4x-4\sqrt{x(x-3)}+x-3$$

$$\left(4\cdot\sqrt{x^2-3x}\right)^2=(3x-4)^2$$

$$16(x^2-3x)=9x^2-24x+16$$

$$7x^2-24x-16=0$$

$$D=144+112=256=16^2$$

$$x_1=\frac{12+16}{7}=4 \qquad x_2=\frac{12-16}{7}=-\frac{4}{7}\ \varnothing$$

4 – натуральное, целое

Ответ: D, E

4. Наибольшим целым решением неравенства $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-2)+2\log_{\sqrt{3}}(x-2)<4$ является:

ОДЗ:
$x-2>0$
$x>2$

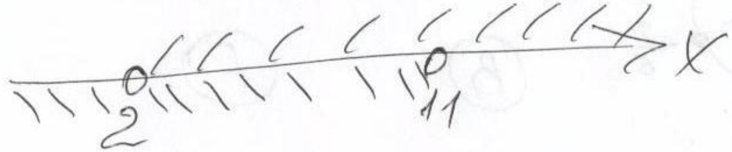
$$\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{x-2}+\log_{\sqrt{3}}(x-2)^2<\log_{\sqrt{3}}9$$

$$\log_{\sqrt{3}}\frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}}<\log_{\sqrt{3}}9$$

$\sqrt{3}>1$, зн. нер. не м

$$x-2<9$$

$$\begin{cases} x<11 \\ x>2 \end{cases}$$



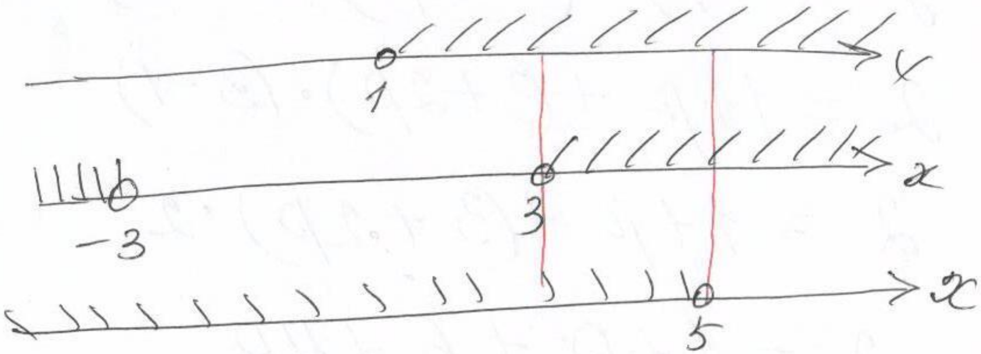
$(2;11)$ наибольшее 10.

Ответ: G

5. Длина интервала, на котором выполняется неравенство $\sqrt{x^2-9} < x-1$, равна:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-9>0 \\ x^2-9<(x-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x>1 \\ (x+3)(x-3)>0 \\ x^2-9-x^2+2x-1<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>1 \\ (x+3)(x-3)>0 \\ x<5 \end{cases}$$



$x \in (3;5)$

Ответ: Д, длина интервала равна 2.

(6.) При каком значении параметра p касательная к графику функции $y=x^3+px^2$ в точке $x=1$ проходит через точку $(3;2)$

$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$

$y(1)=1+p;\quad y'(x)=3x^2+2px\ ;\ y'(1)=3+2p$

$y=(1+p)+(3+2p)\cdot(x-1)$ проходит через точку $(\overset{x}{3};\overset{y}{2})$

$2=1+p+(3+2p)\cdot(3-1)$

$2=1+p+(3+2p)\cdot 2$

$2=1+p+6+4p$

$5p=-5$

$p=-1$

Ответ: (В).

(7) Решите уравнение $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2t+16}}dt = 4$ и укажите делители его корней:

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2t+16}\Big|_0^x = 4$

$\sqrt{2x+16} - \sqrt{16} = 4$

$\sqrt{2x+16} - 4 = 4$

$\sqrt{2x+16} = 8$

$2x + 16 = 64$

$2x = 48$

$x = 24$

делители 6 и 4.

Ответ: E и H.

8) Укажите, какому неравенству удовлетворяет числовое значение площади фигуры, ограниченной кубической параболой $y=2x^3$ и касательной к ней, проведённой в точке $(1;2)$.

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

$f(1)=2\cdot1=2$; $f'(x)=2\cdot3x^2=6x^2$; $f'(1)=6$

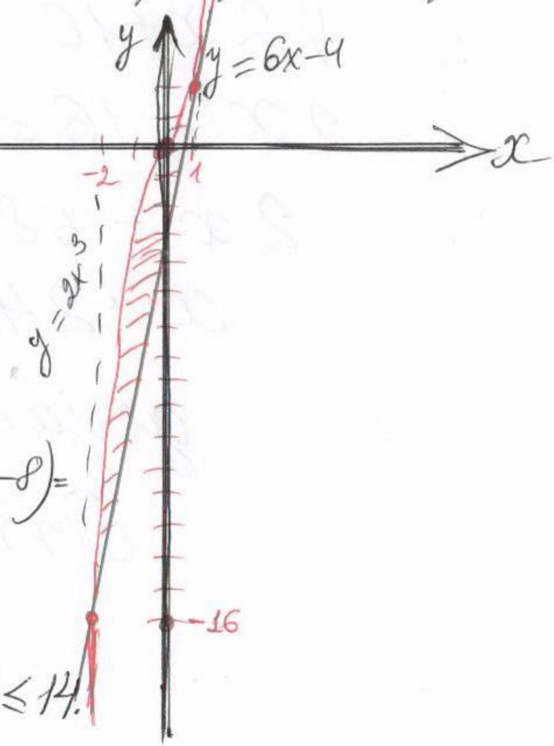
$y=2+6(x-1)$ $\quad$ $\underline{y=6x-4}$ – касательная к гр. ф-ии.

$2x^3=6x-4$. Найдём точки пересечения графиков ф-ий

$2x^3-6x+4=0$

$x=1 \qquad x=-2 \qquad x=1$

$y=2 \qquad y=-16$



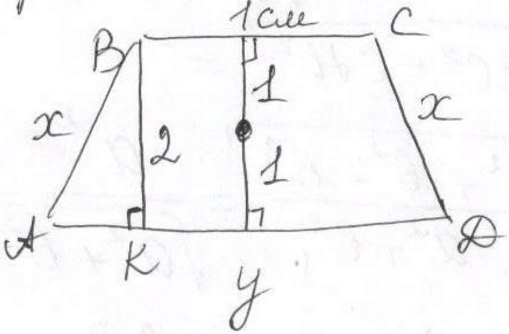
$$S=\int_{-2}^{1}(2x^3-6x+4)\,dx=\left(\frac{2x^4}{4}-\frac{6x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-2}^{1}=$$

$$=\left(\frac{x^4}{2}-3x^2+4x\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(\frac{1}{2}-3+4\right)-\left(\frac{16}{2}-12-8\right)=$$

$$=1+\frac{1}{2}-8+20=13{,}5$$

Ответ: C $\quad 1<S\le 13\frac{2}{3}$, F $\quad 2\le S\le 14$.

9. В равнобокую трапецию с верхним основанием равным 1см, вписана окружность радиусом 1см, тогда нижнее основание трапеции равно:



$AB = CD = x$

$AK = (y-1):2$

по свойству трапеции

$$\begin{cases} 2x = y+1 \\ x^2 = \left(\dfrac{y-1}{2}\right)^2 + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 = (y-1)^2 + 16 \\ y = 2x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{y = 2x-1} \\ 4x^2 = (2x-1-1)^2 + 16 \end{cases}$$

$$4x^2 = 4(x-1)^2 + 4$$

$$2x = 5$$

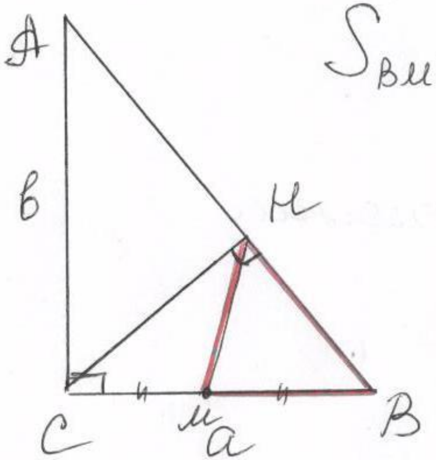
$$x = 2{,}5$$

$$y + 1 = 5$$

$$y = 4$$

Ответ: 4 см (B)

10) В прямоугольном треугольнике ABC катет CA равен b, катет CB равен a, CH – высота, AM – медиана, тогда площадь $\triangle BMH$ равна:



S_{BMH} – ? $AB = \sqrt{a^2+b^2}$ $CH = \dfrac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$\triangle CHB$ – прямоуг $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} =$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{(\sqrt{a^2+b^2})^2}} = a \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2-b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$S_{CHB} = \frac{1}{2} CH \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^3 b}{2(a^2+b^2)}$$

медиана HM делит $\triangle CHB$ на два равновеликих треугольника

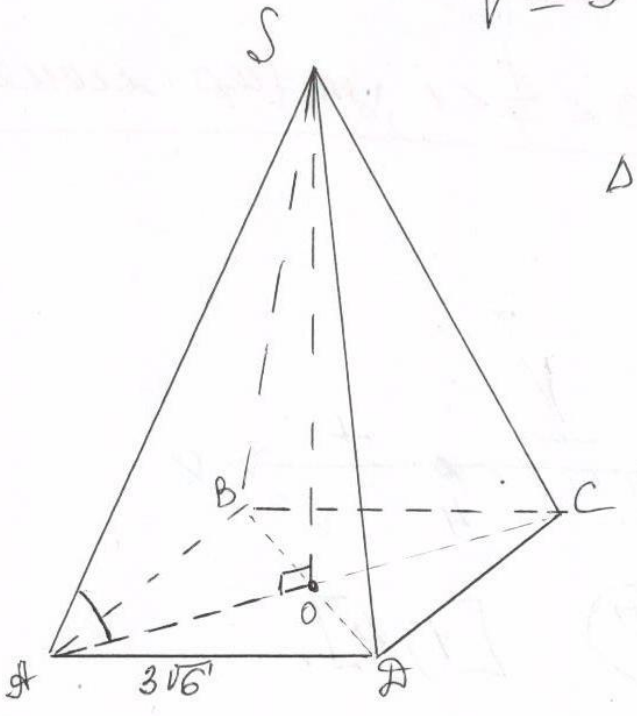
$$S_{BMH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 b}{2 \cdot (a^2+b^2)} = \frac{a^3 \cdot b}{4(a^2+b^2)}$$

Ответ: F

11. В правильной четырёхугольной пирамиде ребро основания равно $3\sqrt{6}$. Объем этой пирамиды 54, тогда угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью её основания равен:

$V = 54$ $\qquad V = \frac{1}{3} \cdot S_0 \cdot h$ $\qquad 54 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3\sqrt{6})^2}{1} \cdot h$

$h = 3$



$\triangle ACD$ – пр. $\quad AC = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{6})^2} = 6\sqrt{3}$

$AO = \frac{1}{2} \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$\triangle ASO$ – прямоуг. $\quad tg\, SAO = \frac{SO}{AO} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\angle ASO = \frac{\pi}{6} = 30°$

Ответ: B, G

12. Найдите решения уравнения:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \le 3,5$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \le \left(\frac{2}{7}\right)^{-1}$$

$0<\frac{2}{7}<1$, зн. нер. меняется

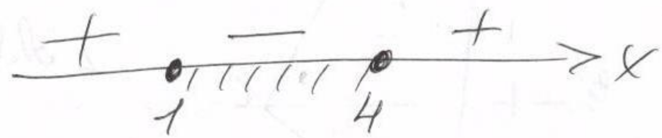
$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2-5x+8) \ge \log_{\frac{1}{4}} 4$$

$0<\frac{1}{4}<1$, зн. нер. меняется

$$x^2-5x+8 \le 4$$

$$x^2-5x+4 \le 0$$

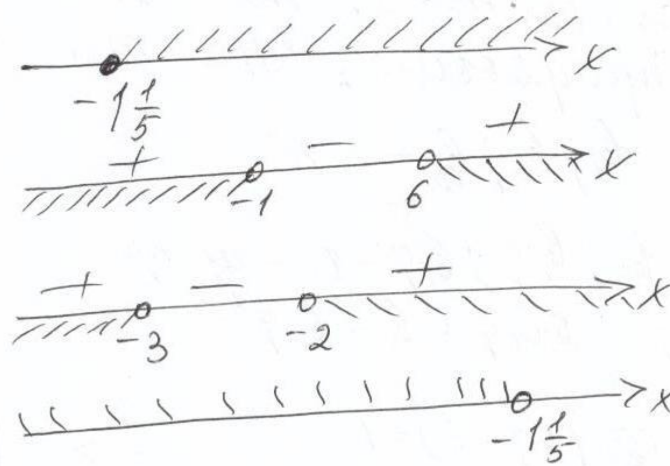
$x=1$. $x=4$



Ответ: C $1 \le x \le 4$; F $[1;4]$.

13. Укажите множества чисел, содержащие наименьшее целое положительное решение неравенства $x^2-|5x+6|>0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5x+6\geq 0\\ x^2-5x-6>0\end{cases}\\ \begin{cases}5x+6<0\\ x^2+5x+6>0\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq -1\frac{1}{5}\\ (x+1)(x-6)>0\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\frac{1}{5}\\ (x+2)(x+3)>0\end{cases}\end{array}\right.$$



1) $\left[-1\frac{1}{5};-1\right)\cup(6;+\infty)$

2) $(-\infty;-3)\cup\left(-2;-1\frac{1}{5}\right)$

$x^2>|5x+6|$ $\qquad 7^2>35+6$ $\qquad 49>41$

Ответ: Д 5; 7; 12; 19; Е 3; 8; 9; 7; Н 6; 10; 7; 13.

14. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если от третьего числа отнять 4, то полученная тройка образует арифметическую прогрессию. А если от второго и третьего члена арифметической прогрессии отнять 1, то они снова образуют геометрическую прогрессию. Найти эти три числа.

$b_1; b_2; b_3$ – г. п

$b_1; b_2; b_3-4$ – ар. пр.

$b_1; b_2-1; b_3-4-1$ – г. пр.

$b_1; b_1q; b_1q^2-4$ – ар. пр

$b_1; b_1q-1; b_1q^2-5$ – г. п.

1) $2b_1q = b_1+b_1q^2-4$

2) $(b_1q^2-1)^2 = b_1\cdot(b_1\cdot q^2-5)$

$-2b_1q+5b_1=-1$

$\begin{cases} b_1(2q-5)=1 \\ b_1(2q-1-q^2)=-4 \end{cases}$ => $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{2q-5} = \frac{1}{9} \\ q=7 \end{cases}$ $\begin{cases} q=3 \\ b_1=1 \end{cases}$

$\frac{2q-5}{2q-1-q^2} = -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{49}{9}$ 1; 3; 9

$q=7$ $q=3$

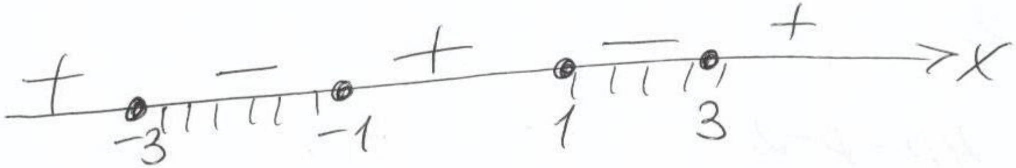
Ответ: $\frac{1}{9}; \frac{7}{9}; \frac{49}{9}$ В; 1; 3; 9 Б

(15.) Укажите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ образует тупой угол с положительным направлением оси OY, если $f(x)=0{,}2x^5-3\frac{1}{3}x^3+9x$

$f'(x)<0$

α – тупой

$$f'(x)=x^4-\frac{10}{3}\cdot 3x^2+9=x^4-10x^2+9=$$
$$=(x^2-1)\cdot(x^2-9)=(x-1)\cdot(x+1)(x-3)(x+3)$$



$x=-2$ $\qquad$ $x=1{,}5;\quad x=2$

Ответ: A, D, E

16. При каких значениях параметра p касательная к графику функции $y = x^3 + px^2$ в точке $x = 1$ проходит через точку $(-2; 3)$

$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f(1) = 1 + p$; $f'(x) = 3x^2 + 2px$, $f'(1) = 3 + 2p$

$y = 1 + p + (3 + 2p) \cdot (x - 1) = 1 + p + 3x + 2px - 3 - 2p$

$y = 3x + 2px - p - 2$

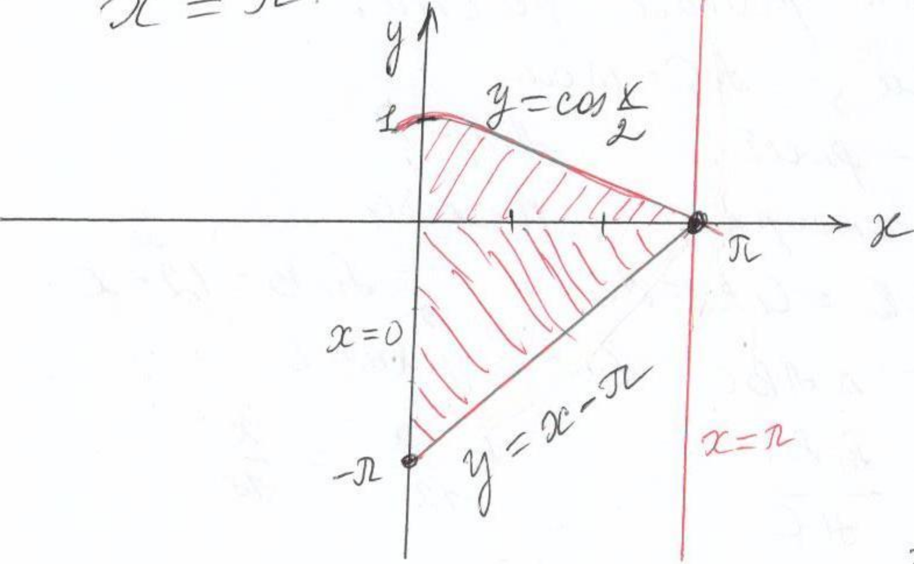
$(\overset{x}{-2}; \overset{y}{3})$ $\quad 3 = -6 - 4p - p - 2$

$5p = -11$

$p = -2,2$

Ответ: 6

17. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = \cos\frac{x}{2}$; $y = x - \pi$; $x = 0$; $x = \pi$.



$$S = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\cdot\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} =$$

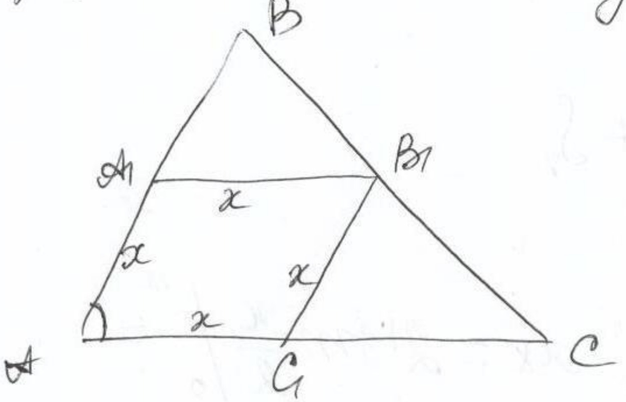
$$= 2\cdot\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin 0 = 2$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

$$S = 2 + \frac{\pi^2}{2}$$

Ответ. G

18. В треугольник вписан ромб, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол равны 12 см и 18 см, тогда сторона ромба равна:



$AB = 12$ см, $AC = 18$ см

$AA_1B_1C_1$ – ромб. AA_1 – ?

Пусть x – сторона ромба.

$AA_1 = A_1B_1 = C_1B_1 = AC_1 = x$, $A_1B = 12 - x$.

$\triangle A_1BB_1 \sim \triangle ABC$ (по 2 углам)

$$\frac{BA_1}{AB} = \frac{A_1B_1}{AC} \qquad \frac{12-x}{12} = \frac{x}{18}$$

$3(12 - x) = 2x$

$36 - 3x = 2x$

$5x = 36$

$x = 7{,}2$ см $\qquad AA_1 = 7{,}2$ см

Ответ: А 7,2 см; Н $\frac{108}{15}$ см.

19. Даны функции $h(x)=2x^3-3x^2+\sqrt{6}\cdot x$ и $g(x)=x\sqrt{6}-12$. Найти все значения x, для которых $h'(x)\le g'(x)$.

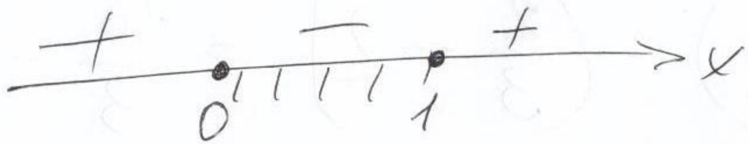
$h'(x)=6x^2-6x+\sqrt{6}$ $\qquad$ $g'(x)=\sqrt{6}$.

$$6x^2-6x+\sqrt{6}\le\sqrt{6}$$

$$6x^2-6x\le 0$$

$$6x(x-1)\le 0$$

$$x(x-1)\le 0$$



Ответ: $[0;1]$ Д

(20.) Вычислите: $\int_1^4 \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)dx =$

$= \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2}\right)dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx =$

$= \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4 =$

$= \left(\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + 2 =$

$= \frac{14}{3} - 2 = 2\frac{2}{3}$

Ответ: $2\frac{2}{3}$ (В)